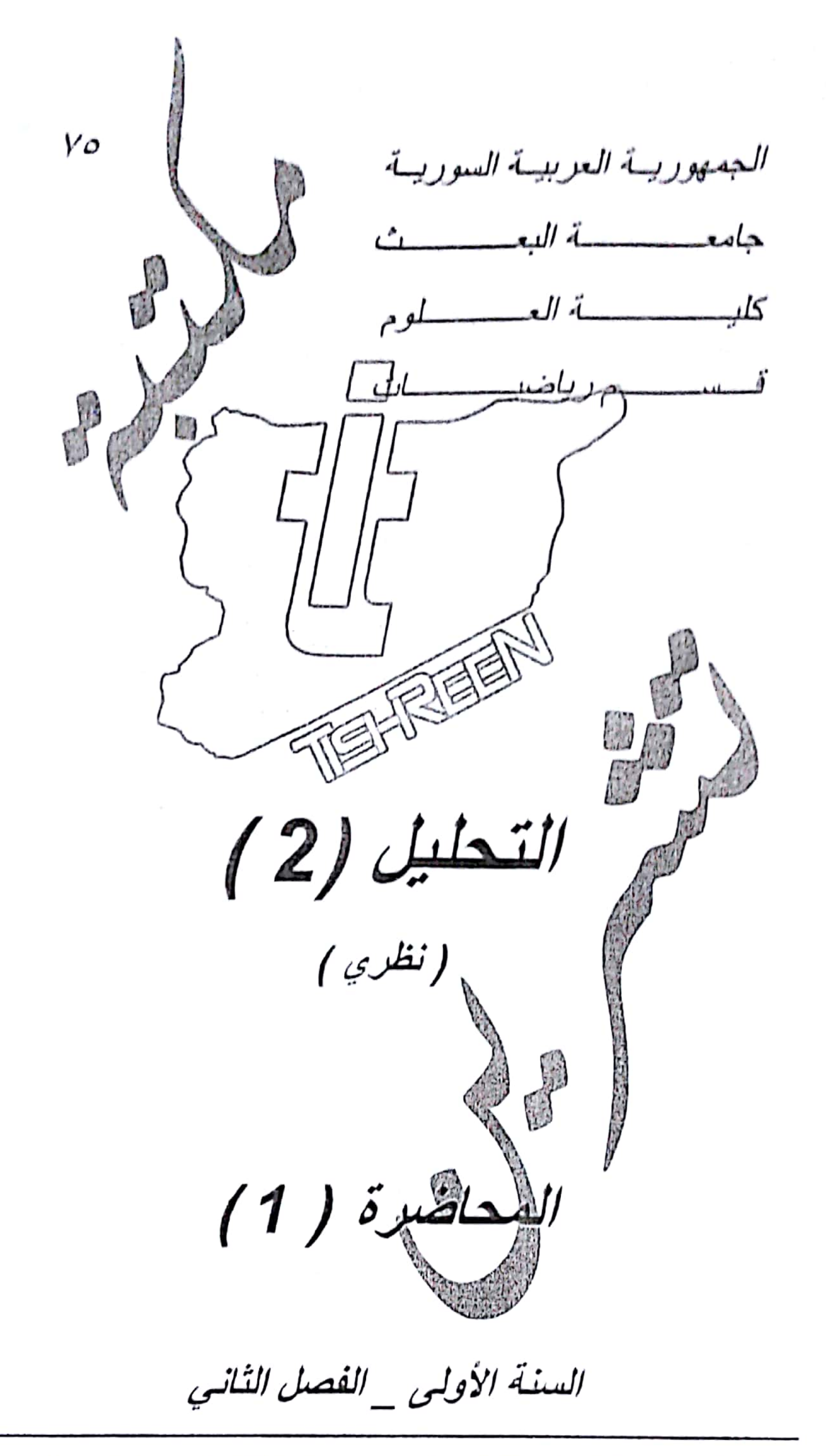
٧٥

الجمهورية العربية السورية

جامعة البعث

كلية العلوم

قسم رياضيات



التحليل (2)

(نظري)

المحاضرة (1)

السنة الأولى _ الفصل الثاني

التحليل 2

يعتبر مقرر التحليل 2 لطلاب السنة الأولى الفصل الدراسي الثاني امتداداً لما درسناه في علوم التحليل الرياضي ....
فكما وجدنا في الفصل الأول بمادة التحليل 1 ... كانت دراستنا تركز بشكل كبير على موضوع التوابع بشكل عام وعلى موضوع اشتقاق وتفاضل التوابع على وجه الخصوص ...

والآن في مقرر التحليل 2 سنركز دراستنا كاملة على موضوع تكامل التوابع ... تم إعداد هذه المحاضرات الورقية وفقاً لما يتم إعطاؤه من قبل مدرسي المقرر الدكتور محمد الشرباتي والدكتور منير خلوف ... آملين بأن تعم الفائدة لزملائنا ...

((الفصول الرئيسية الثلاثة لمادة التحليل 2))

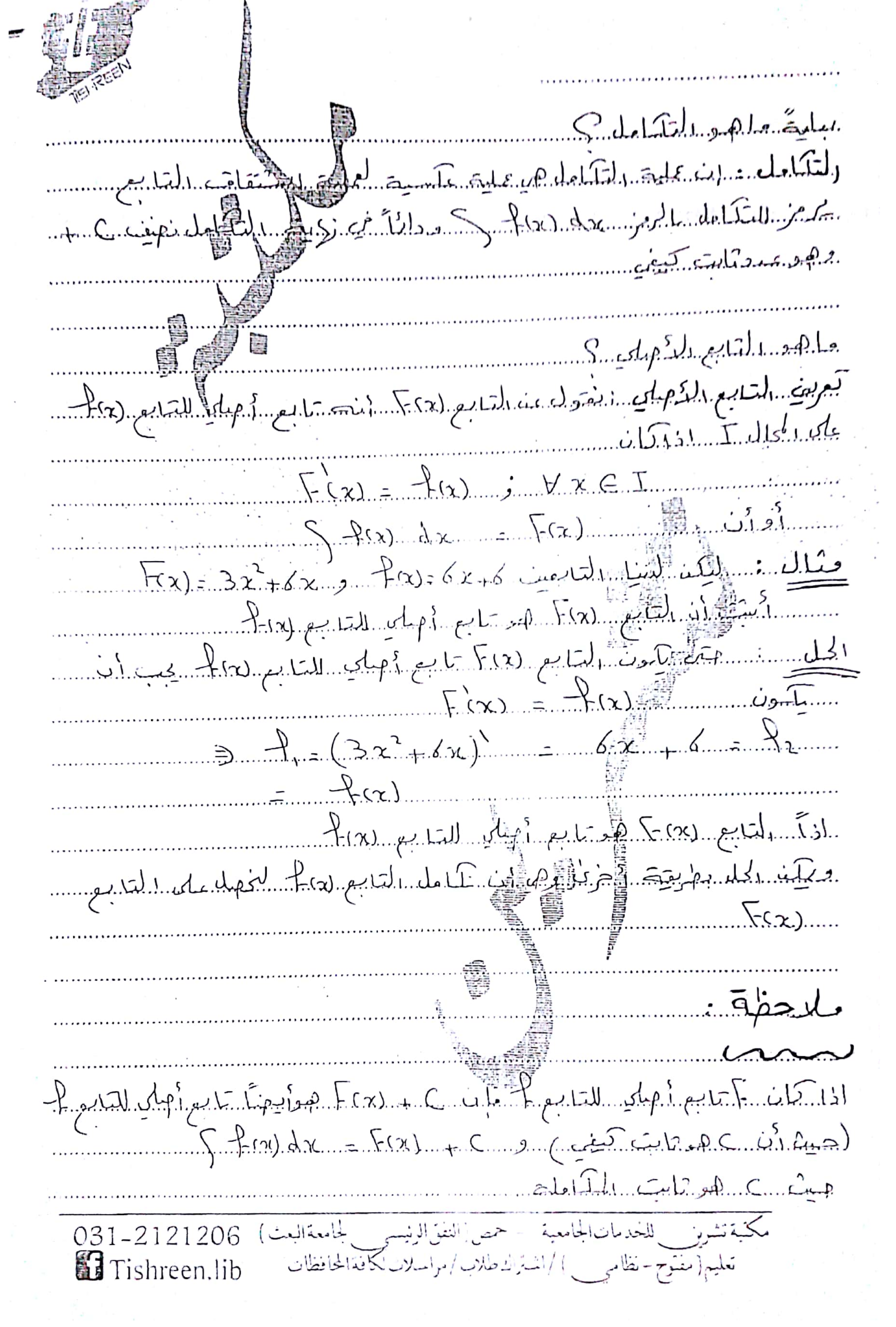
1 _ التكامل المحدد
2 _ التكامل غير المحدد
3 _ التكاملات المعتلة

* سنورد فيما يلي أبرز عناوين مادة التحليل 2 :

مفهوم التكامل ـ جدول التكاملات الشهيرة ـ التكامل بالتجزئة وبتغيير المتحول ـ تكاملات الدوال الكسرية والصماء والمثلثية بأنواعها المختلفة ـ التكامل بالتربيع ـ مفهوم التكامل المحدد ـ الخواص وطرق الحساب وتطبيقات التكامل المحدد ـ التكاملات المعتلة

نصيحة : تعد مادتي التحليل 1 والتحليل 2 أهم مواد السنة الأولى لذا ينصح بإعطائهما الأولوية التامة ... وعلى وجه الخصوص مادة التحليل 2 ... وذلك لما لها من استخدامات كبيرة وتطبيقات مباشرة وغير مباشرة في أغلب مواد السنوات القادمة

مع تمنياتنا بالتوفيق ...



بداية ما هو التكامل؟

التكامل: إن عملية التكامل هي عملية عكسية لعملية الاشتقاق التابع

يرمز للتكامل بالرمز $\int f(x)\,dx$ ودائماً في نهاية التكامل نضيف $+\,C$

وهو عدد ثابت كيفي

ما هو التابع الأصلي؟

تعريف التابع الأصلي: نقول عن التابع $F(x)$ إنه تابع أصلي للتابع $f(x)$ على المجال I إذا كان

$$F'(x) = f(x) \quad ; \quad \forall x \in I$$

أو أن

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

مثال: ليكن لدينا التابعين $f(x) = 6x + 6$ و $F(x) = 3x^2 + 6x$

أثبت أن التابع $F(x)$ هو تابع أصلي للتابع $f(x)$

الحل: حتى يكون التابع $F(x)$ تابع أصلي للتابع $f(x)$ يجب أن يكون

$$F'(x) = f(x)$$

$$\Rightarrow f_1 = (3x^2 + 6x)' = 6x + 6 = f_2$$

$$= f(x)$$

إذاً التابع $F(x)$ هو تابع أصلي للتابع $f(x)$

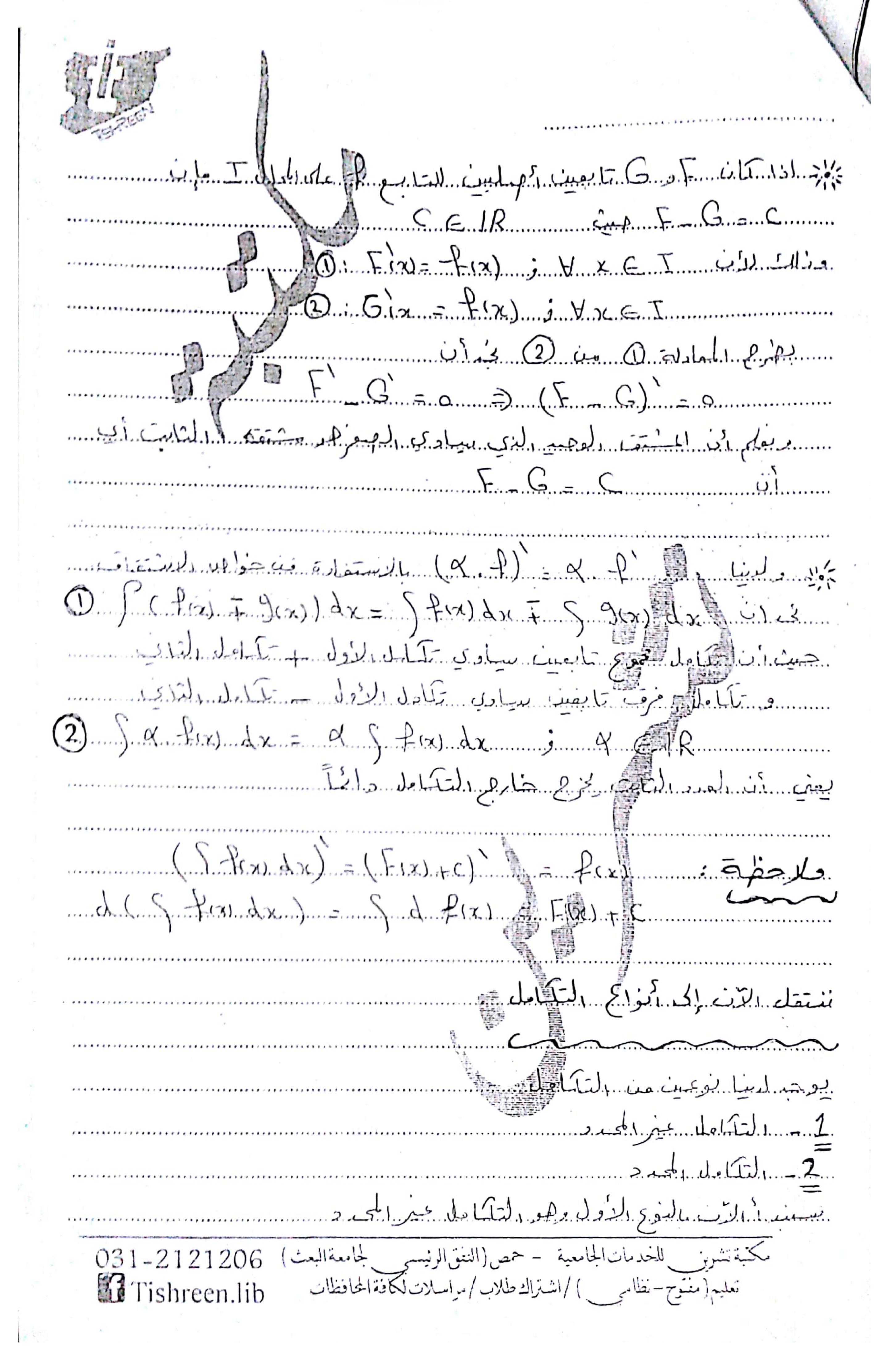
ويمكن الحل بطريقة أخرى وهي أن نكامل التابع $f(x)$ لنحصل على التابع $F(x)$

ملاحظة:

إذا كان F تابع أصلي للتابع f فإن $F(x) + C$ هو أيضاً تابع أصلي للتابع f

(حيث أن C هو ثابت كيفي) و $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

حيث C هو ثابت التكامل



☼ اذا كان F و G تابعين أصليين للتابع f على المجال I فإن $F - G = C$ حيث $C \in IR$

وذلك لأن ①: $F'(x) = f(x) \; ; \; \forall x \in I$

②: $G'(x) = f(x) \; ; \; \forall x \in I$

بطرح المعادلة ② من ① نجد أن

$$F' - G' = 0 \Rightarrow (F - G)' = 0$$

ونعلم أن المشتق الوحيد الذي يساوي الصفر هو مشتق الثابت أي

أن $F - G = C$

☼ ولدينا $(\alpha . f)' = \alpha . f'$ بالاستفادة من خواص الاشتقاق

نجد أن ① $\int (f(x) \mp g(x))\, dx = \int f(x)\, dx \mp \int g(x)\, dx$

حيث أن تكامل مجموع تابعين يساوي تكامل الأول + تكامل الثاني

و تكامل فرق تابعين يساوي تكامل الأول - تكامل الثاني

② $\int \alpha f(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx \; ; \; \alpha \in IR$

يعني أن العدد الثابت يخرج خارج التكامل دائماً

ملاحظة: $\left(\int f(x)\, dx\right)' = (F(x) + c)' = f(x)$

$$d\left(\int f(x)\, dx\right) = \int d\, f(x) = F(x) + c$$

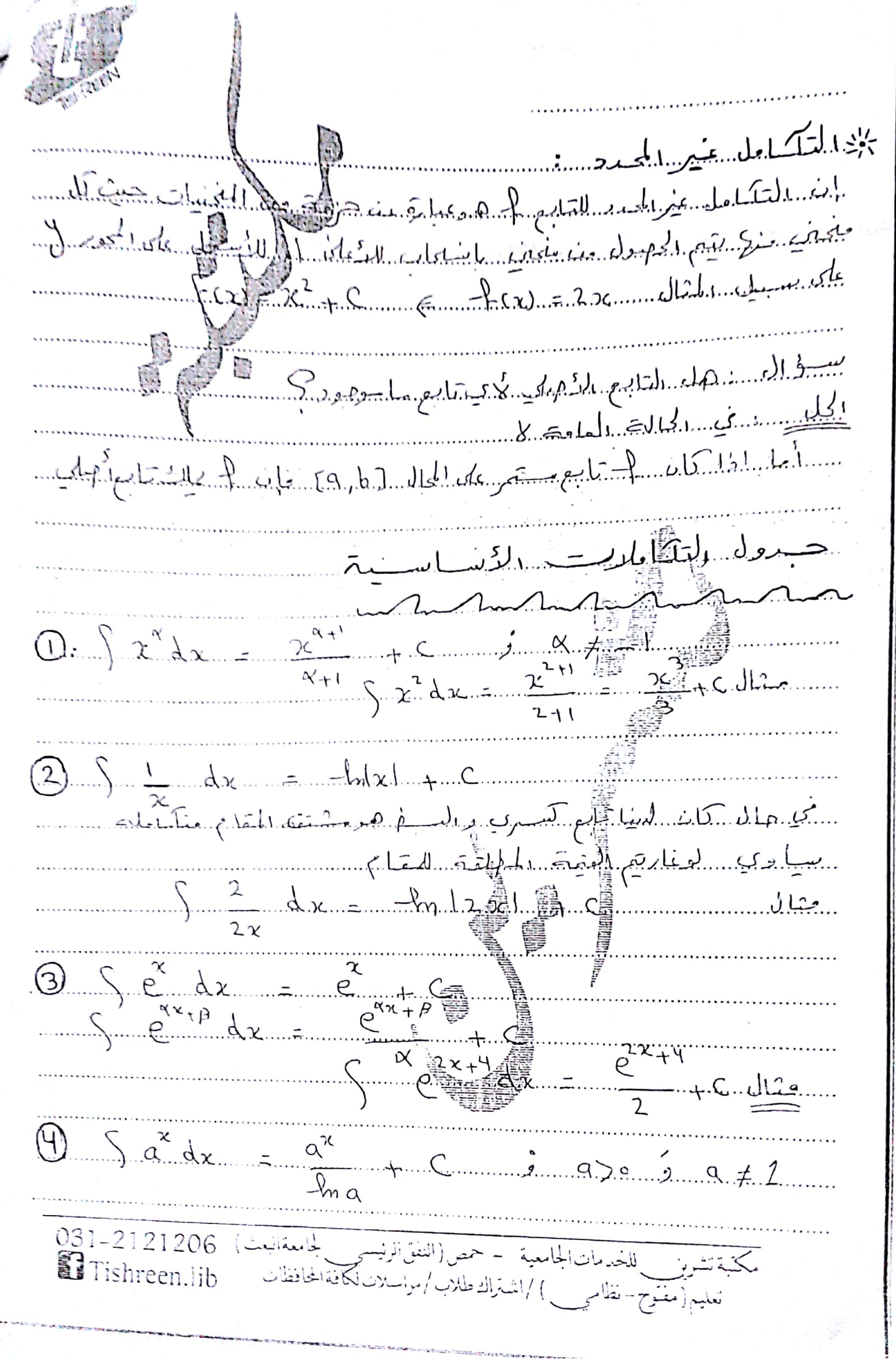
ننتقل الآن إلى أنواع التكامل

يوجد لدينا نوعين من التكامل

1 - التكامل غير المحدد

2 - التكامل المحدد

سنبدأ الآن بالنوع الأول وهو التكامل غير المحدد



☼ التكامل غير المحدد :

إن التكامل غير المحدد للتابع f هو عبارة عن جملة من المنحنيات حيث كل منحني منها يتم الحصول من منحني بانسحاب للأعلى أو للأسفل على المحور y

على سبيل المثال $f(x) = 2x \Leftarrow F(x) = x^2 + C$

سؤال : هل التابع الأصلي لأي تابع ما موجود؟

الحل : في الحالة العامة لا

أما إذا كان f تابع مستمر على المجال $[a,b]$ فإن f يملك تابع أصلي

جدول التكاملات الأساسية

① : $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ ؛ $\alpha \neq -1$

مثال $\int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} = \frac{x^3}{3} + C$

② $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

في حال كان لدينا تابع كسري والبسط هو مشتق المقام فإن تكامله يساوي لوغاريتم القيمة المطلقة للمقام

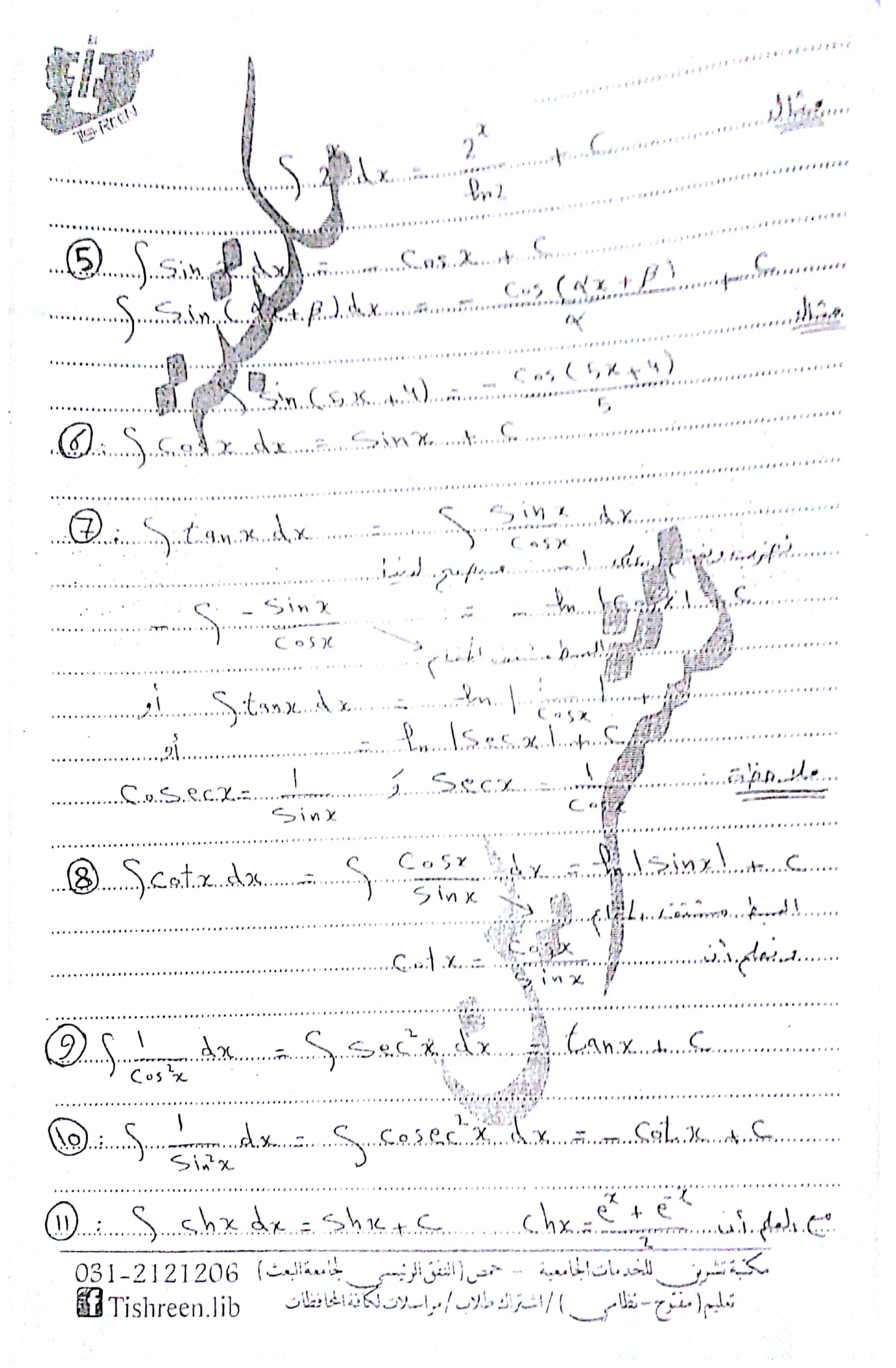
مثال $\int \frac{2}{2x} dx = \ln|2x| + C$

③ $\int e^{x} dx = e^{x} + C$

$\int e^{\alpha x+\beta} dx = \frac{e^{\alpha x+\beta}}{\alpha} + C$

مثال $\int e^{2x+4} dx = \frac{e^{2x+4}}{2} + C$

④ $\int a^{x} dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$ ؛ $a > 0$ ؛ $a \neq 1$



مثال

$\int 2^x\,dx = \frac{2^x}{\ln 2} + c$

(5) $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

$\int \sin(\alpha x+\beta)\,dx = -\frac{\cos(\alpha x+\beta)}{\alpha} + c$

مثال

$\int \sin(5x+4) = -\frac{\cos(5x+4)}{5}$

(6) $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

(7) $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

نضرب ونقسم بـ (-) لتصبح [illegible] لدينا

$= -\int \frac{-\sin x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + c$

البسط مشتق المقام

أو $\int \tan x\,dx = \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + c$

أو $= \ln|\sec x| + c$

ملاحظة: $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ و $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

(8) $\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x| + c$

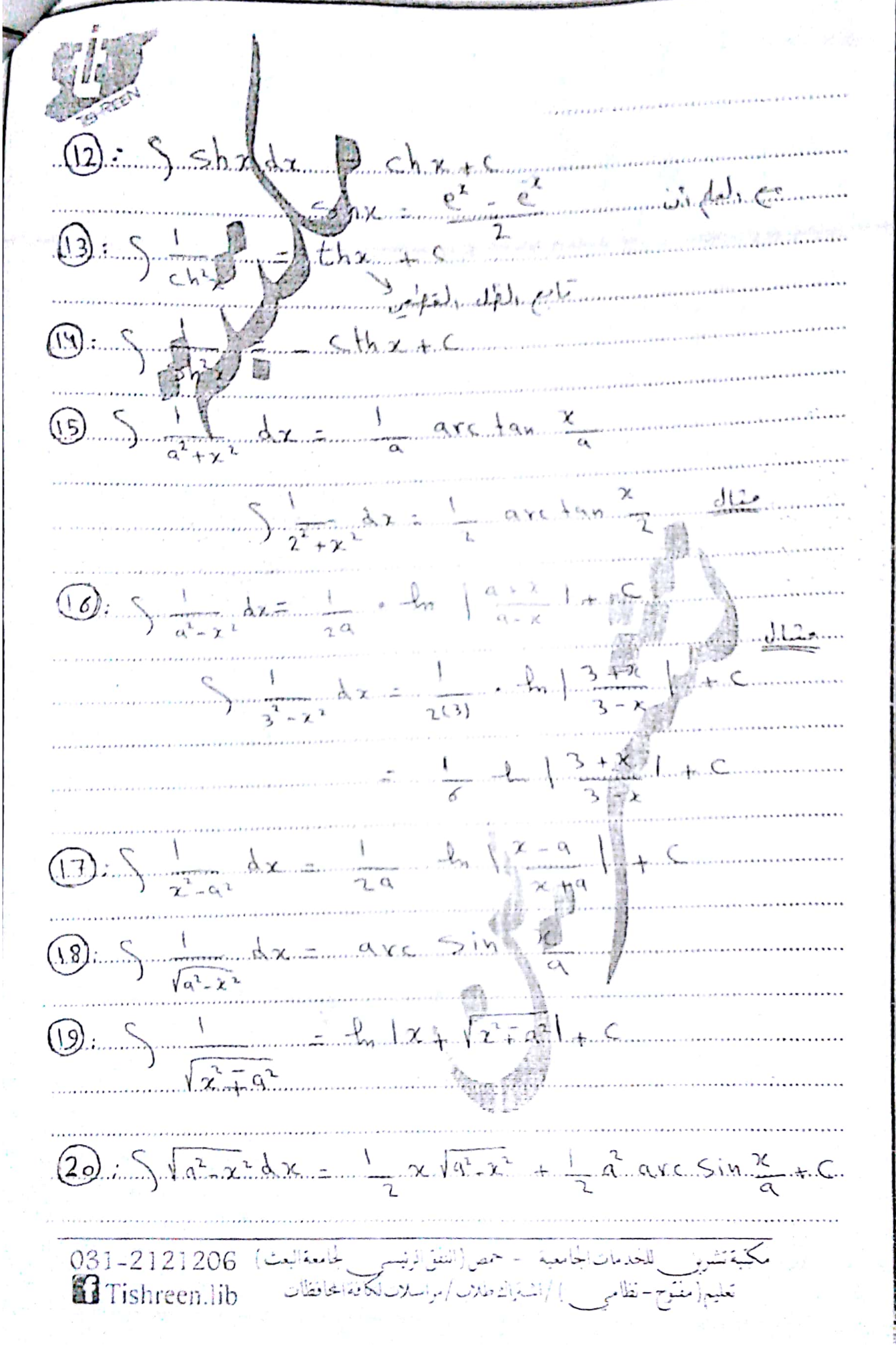
البسط مشتق المقام

مع العلم أن $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

(9) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$

(10) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c$

(11) $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + c$ مع العلم أن $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$



(12): $\int sh\,x\,dx = ch\,x + c$

مع العلم أن: $sh\,x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

(13): $\int \dfrac{1}{ch^2 x} = th\,x + c$ ← تابع الظل القطعي

(14): $\int \dfrac{1}{sh^2 x} = -\,cth\,x + c$

(15): $\int \dfrac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \dfrac{1}{a} \arctan \dfrac{x}{a}$

مثال: $\int \dfrac{1}{2^2 + x^2}\,dx = \dfrac{1}{2} \arctan \dfrac{x}{2}$

(16): $\int \dfrac{1}{a^2 - x^2}\,dx = \dfrac{1}{2a} \cdot \ln \left| \dfrac{a + x}{a - x} \right| + c$

مثال: $\int \dfrac{1}{3^2 - x^2}\,dx = \dfrac{1}{2(3)} \cdot \ln \left| \dfrac{3 + x}{3 - x} \right| + c$

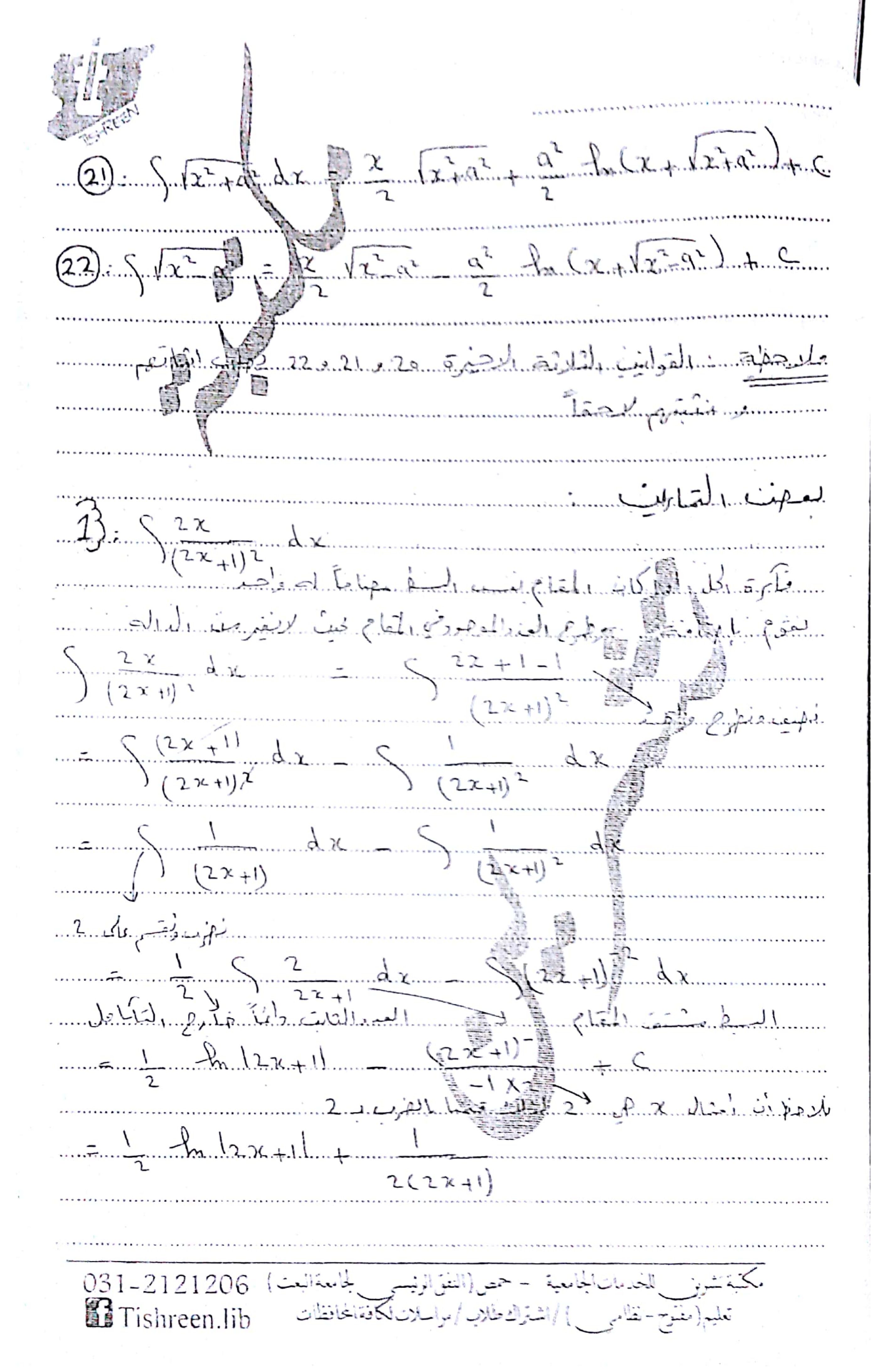
$= \dfrac{1}{6} \ln \left| \dfrac{3 + x}{3 - x} \right| + c$

(17): $\int \dfrac{1}{x^2 - a^2}\,dx = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{x - a}{x + a} \right| + c$

(18): $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \arcsin \dfrac{x}{a}$

(19): $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \mp a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \mp a^2} \right| + c$

(20): $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \dfrac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{1}{2} a^2 \arcsin \dfrac{x}{a} + c$



(21): $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + c$

(22): $\int \sqrt{x^2-a^2} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + c$

ملاحظة: القوانين الثلاثة الأخيرة 20 و 21 و 22 يجب إثباتهم
و سنثبتهم لاحقاً

بعض التمارين:

1): $\int \frac{2x}{(2x+1)^2}\,dx$

فكرة الحل: إذا كان المقام ليس البسط مقاماً له واحد
نقوم بإضافة وطرح العدد المطلوب في المقام بحيث لا نغير من الدالة

$\int \frac{2x}{(2x+1)^2}\,dx = \int \frac{2x+1-1}{(2x+1)^2}$ ← نوزع مقام

$= \int \frac{(2x+1)}{(2x+1)^2}\,dx - \int \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx$

$= \int \frac{1}{(2x+1)}\,dx - \int \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx$

نضرب ونقسم على 2

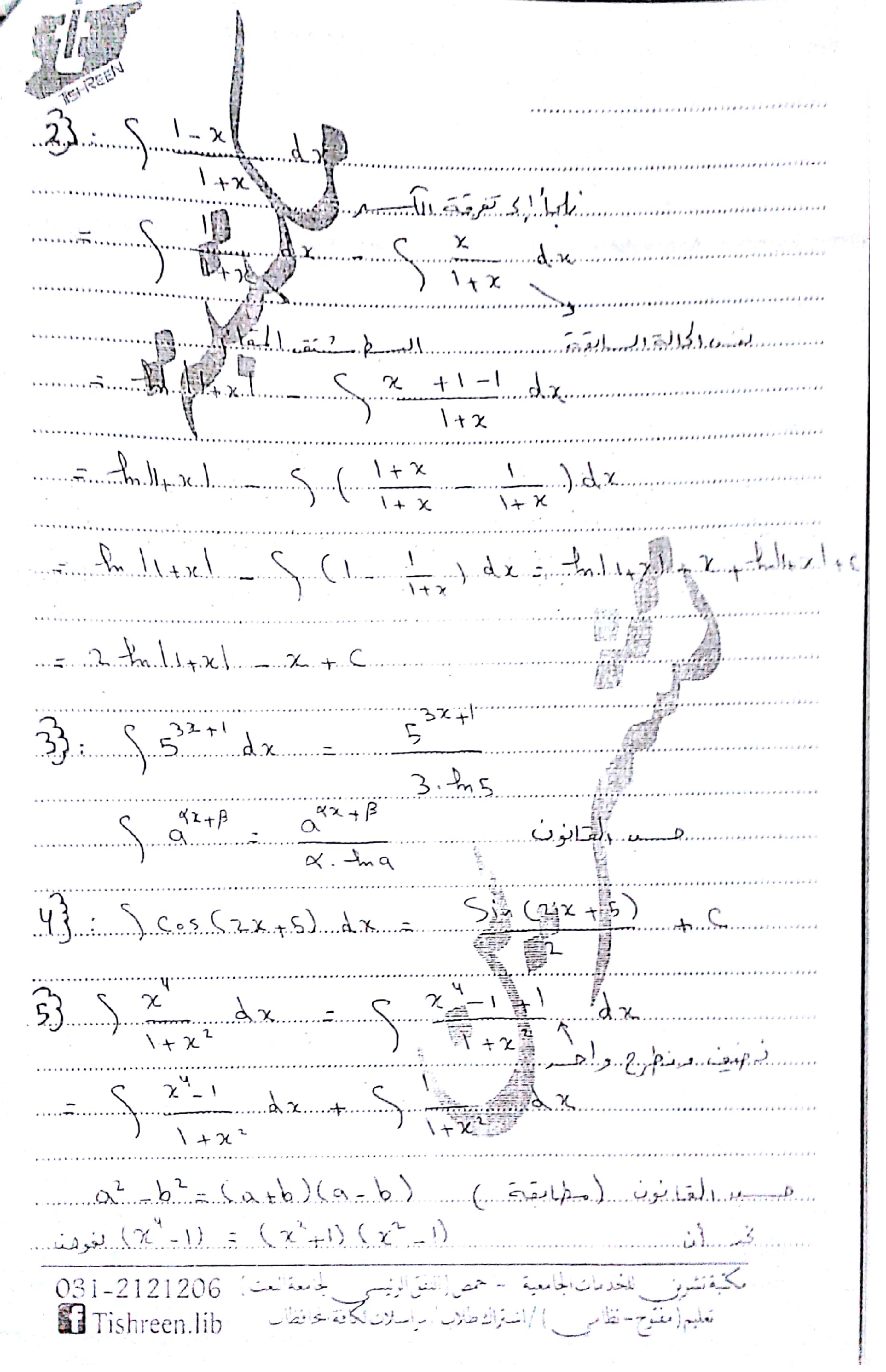
$= \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x+1}\,dx - \int (2x+1)^{-2}\,dx$

العدد الثابت دائماً خارج التكامل ← البسط مشتق المقام

$= \frac{1}{2}\ln|2x+1| - \frac{(2x+1)^{-1}}{-1\times 2} + c$

نلاحظ أن أمثال x هي 2 لذلك قمنا بالضرب بـ 2

$= \frac{1}{2}\ln|2x+1| + \frac{1}{2(2x+1)}$



2} : $\int \frac{1-x}{1+x}\, dx$

نلجأ إلى تفرقة الكسر

$= \int \frac{1}{1+x}\, dx - \int \frac{x}{1+x}\, dx$

البسط مشتق المقام .... نفس الحالة السابقة

$= \ln|1+x| - \int \frac{x+1-1}{1+x}\, dx$

$= \ln|1+x| - \int \left(\frac{1+x}{1+x} - \frac{1}{1+x} \right) dx$

$= \ln|1+x| - \int \left(1 - \frac{1}{1+x} \right) dx = \ln|1+x| - x + \ln|1+x| + c$

$= 2\ln|1+x| - x + c$

3}: $\int 5^{3x+1}\, dx = \frac{5^{3x+1}}{3 \cdot \ln 5}$

$\int a^{\alpha x+\beta} = \frac{a^{\alpha x+\beta}}{\alpha \cdot \ln a}$ حسب القانون

4}: $\int \cos(2x+5)\, dx = \frac{\sin(2x+5)}{2} + c$

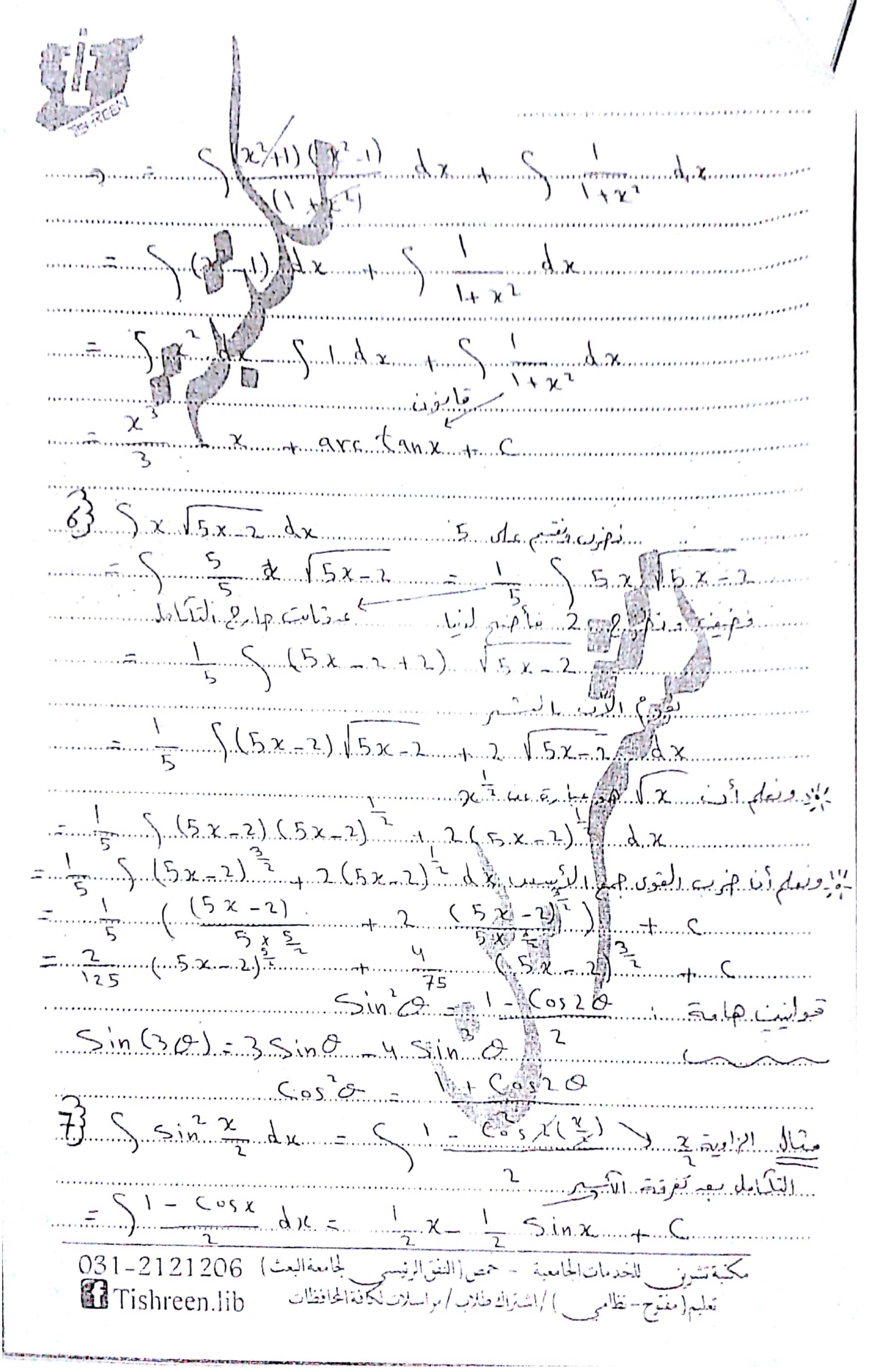
5}: $\int \frac{x^4}{1+x^2}\, dx = \int \frac{x^4-1+1}{1+x^2}\, dx$

نضيف ونطرح واحد

$= \int \frac{x^4-1}{1+x^2}\, dx + \int \frac{1}{1+x^2}\, dx$

حسب القانون (مطابقة) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

نجد أن $(x^4-1) = (x^2+1)(x^2-1)$ نعوض



$$= \int \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{(1+x^2)} dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \int (x^2-1) dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \int x^2 dx - \int 1 dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

قانون

$$= \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C$$

6) $\int x\sqrt{5x-2}\, dx$ نضرب ونقسم على 5

$$= \int \frac{5}{5} x \sqrt{5x-2} = \frac{1}{5} \int 5x\sqrt{5x-2}$$

عدد ثابت خارج التكامل ← — نضيف ونطرح 2 فأصبح لدينا

$$= \frac{1}{5} \int (5x-2+2) \sqrt{5x-2}$$

نوزع الاس المشتر

$$= \frac{1}{5} \int (5x-2)\sqrt{5x-2} + 2\sqrt{5x-2}\, dx$$

ونعلم أن $\sqrt{x}$ هي عبارة عن $x^{\frac{1}{2}}$

$$= \frac{1}{5} \int (5x-2)(5x-2)^{\frac{1}{2}} + 2(5x-2)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{5} \int (5x-2)^{\frac{3}{2}} + 2(5x-2)^{\frac{1}{2}} dx$$ ونعلم أنا عند ضرب القوى نجمع الأسس

$$= \frac{1}{5} \left(\frac{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}{5 \times \frac{5}{2}} + 2\frac{(5x-2)^{\frac{3}{2}}}{5 \times \frac{3}{2}} \right) + C$$

$$= \frac{2}{125} (5x-2)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{75} (5x-2)^{\frac{3}{2}} + C$$

قوانين هامة :

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

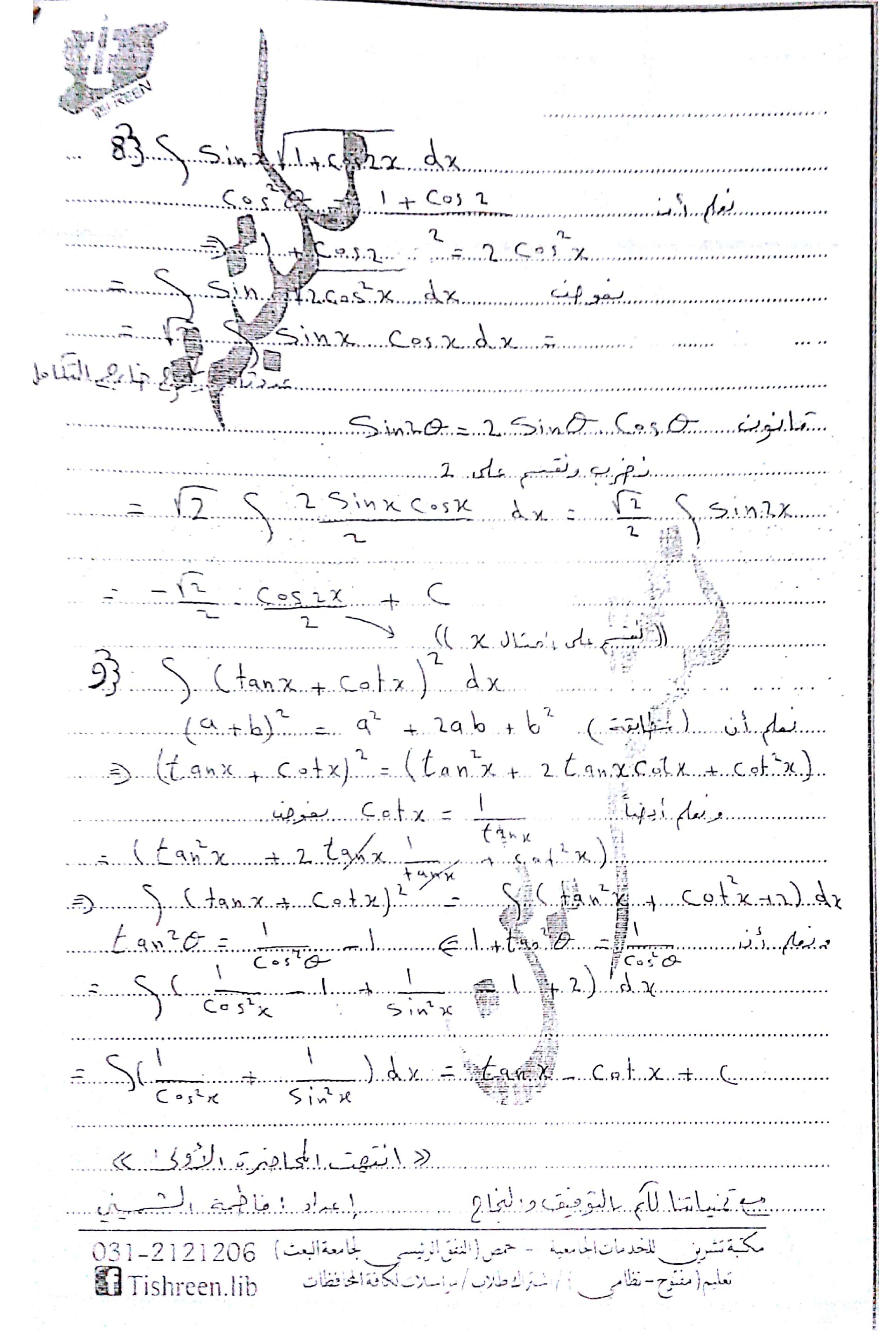
$$\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

7) $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1 - \cos 2(\frac{x}{2})}{2}$ ← مثال الزاوية $\frac{x}{2}$

التكامل بعد معرفة الأخير

$$= \int \frac{1-\cos x}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + C$$



8) $\int \sin x\sqrt{1+\cos 2x}\,dx$

نعلم أن $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$

$\Rightarrow 1+\cos 2x = 2\cos^2 x$

نعوض $= \int \sin x\sqrt{2\cos^2 x}\,dx$

$= \sqrt{2}\int \sin x \cos x\,dx =$

عدد ثابت نخرجه خارج التكامل

قانون $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

نضرب ونقسم على 2

$= \sqrt{2}\int \frac{2\sin x\cos x}{2}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \sin 2x$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\cos 2x}{2} + C$ ((التقسيم على أمثال x))

9) $\int (\tan x + \cot x)^2\,dx$

نعلم أن (المطابقة) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$\Rightarrow (\tan x + \cot x)^2 = (\tan^2 x + 2\tan x\cot x + \cot^2 x)$

ونعلم أيضاً $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ نعوض

$= (\tan^2 x + 2\tan x\frac{1}{\tan x} + \cot^2 x)$

$\Rightarrow \int (\tan x + \cot x)^2 = \int (\tan^2 x + \cot^2 x + 2)\,dx$

ونعلم أن $1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} - 1$

$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 + \frac{1}{\sin^2 x} - 1 + 2\right)dx$

$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx = \tan x - \cot x + C$

«انتهت المحاضرة الأولى»

مع تمنياتنا لكم بالتوفيق والنجاح

إعداد: فاطمة الشيخ